Uitwerking Proeftentamen Stromingsleer

Schrijf op elk in te leveren blad je naam en studentnummer, en op het eerste blad het aantal ingeleverde bladen. Het gebruik van aantekeningen, boeken, en grafische rekenmachine is niet toegestaan. Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd. Succes.

1. We beschouwen en onsamendrukbare, stationaire stroming die beschreven kan worden door de Euler vergelijkingen. De stroming wordt aangedreven door een conservatieve massakracht $F = \nabla f$.

   (a) Hoe luiden de bewegingingsvergelijkingen van Euler in dit geval?

   Zie dictaat paragraaf 1.2.2, vergelijking (1.6) met $\partial_t v = 0$ *(want stationair)*

   (b) Toon aan dat
   $$\nabla \left(p/\rho + \tfrac{1}{2}|u|^2 - f\right) = u \times \omega$$
   waarbij ω de wervelvector is.
   NB: Je mag hierbij van de identiteit $(u \cdot \nabla)u + u \times \omega = \frac{1}{2}\nabla(|u|^2)$ gebruik maken, zonder bewijs.

   Zie paragraaf 1.3, vergelijking (1.15) met $\partial_t v = 0$ *(want stationair)*

   (c) Beredeneer dat $p/\rho + \frac{1}{2}|u|^2 - f$ constant moet zijn langs een stroomlijn.

   Zie paragraaf 1.3, vergelijking (1.16)

   (d) Een vloeistof (met een constante dichtheid ρ) stroomt door een pijp met een variabele doorsnede. Op twee punten A en B op de as van de pijp wordt de druk gemeten, de waarden zijn p_A en p_B respectievelijk. Laat m.b.v.(c) zien dat de snelheid in B gegeven wordt door
   $$\left(\frac{2a_1^2(p_A - p_B)}{\rho(a_1^2 - a_2^2)}\right)^{\frac{1}{2}}$$
   waarbij a_1 de oppervlakte van de doorsnede bij A is en a_2, idem bij B.

   Idee: pas wet van Bernoulli toe. Aaname: de twee punten A en B liggen op een stroomlijn. Zie ook Venturi buis.

   Bernoulli: $p_A + \frac{1}{2}v_A^2 - f_A = p_B + \frac{1}{2}v_B^2 - f_B$
   massa-behoud: $a_1 v_A = a_2 v_B$

   v_A *oplossen uit massa-behoud en invullen in Bernoulli geeft*
   $$v_B^2 = \frac{2a_1^2(p_A - p_B - \rho(f_A - f_B))}{\rho(a_1^2 - a_2^2)}$$

In de opgave is de aanname $f_A = f_B$ weggevallen...

2. We beschouwen een stilstaand lichaam begrensd door een gesloten contour S in het z-vlak. Het lichaam is geplaatst in een een willekeurige stationaire niet-samendrukbare 2D potentiaalstroming in het z-vlak. S is een stroomlijn. D.m.v. integratie van drukkrachten vinden we de kracht X die door de vloeistof in de positieve x-richting wordt uitgeoefend op het lichaam $X = -\int_S p dy$. Op soortgelijke wijze wordt de kracht in de positieve y-richting $Y = \int_S p dx$. Deze twee krachten worden complex gecombineerd:
$$X - \mathrm{i}Y = -\mathrm{i} \int_S p\,(dx - \mathrm{i}dy)$$
Toon aan dat (eerste stelling van Blasius)
$$X - \mathrm{i}Y = \tfrac{1}{2}\mathrm{i}\rho \int_S \left(\frac{d\chi}{dz}\right)^2 dz$$
waarbij ρ de massadichtheid voorstelt en χ de complexe potentiaal is.

Het bewijs van de eerste stelling van Blasius staat op pag 29/30 van het dictaat

3. We beschouwen bewegingen van een watermassa (met constante dichtheid ρ) waarvan het vrije oppervlak in rusttoestand samenvalt met het vlak $z = 0$. De zwaartekracht werkt in de richting van de negatieve z-as. Het water is oneindig diep, d.w.z. de bodem wordt gegeven door $z = -\infty$. Wanneer het water golfbewegingen uitvoert wordt de vorm van het vrije oppervlak beschreven door $z = \eta(x, y, t)$. Het water wordt gezien als een niet-viskeuze, onsamendrukbare vloeistof. Verder gaan we ervan uit dat de stroming van het water rotatievrij is, en dat de golf een zeer kleine amplitude heeft. De gelinearizeerde dynamische randvoorwaarde luidt dan
$$\Phi_t + g\eta = 0$$
op $z = 0$, waarbij Φ de snelheidspotentiaal is en g de valversnelling.

   (a) Geef een partiële differentiaalvergelijking voor Φ.

   Zie vergelijking (4.1) in het dictaat

   (b) Leid de kinematische vrijeoppervlakteconditie af, en toon aan dat de gelineariseerde kinematische randvoorwaarde op $z = 0$ wordt gegeven door
$$\eta_t = \Phi_z$$

   Bijv: Eerst de niet-lineaire kinematische rvw afleiden, zie paragraaf 4.1.2, en dan vergelijking (4.8) lineariseren

(c) Hoe luidt de randvoorwaarde voor Φ als $z \to -\infty$?

$\Phi \to 0$ *als* $z \to -\infty$

(d) We nemen aan dat de potentiaal niet van y afhangt, en dat

$$\eta(x,t) = \epsilon \sin(kx - \omega t)$$

met $\epsilon k \ll 1$. Toon aan dat

$$\Phi(x,t) = \epsilon\, c \exp(kz) \cos(kx - \omega t)$$

waarbij de voortplantingsnelheid $c = \omega/k$ van de golf wordt gegeven door

$$c^2 = g/k$$

Zie paragraaf 4.2.2

(e) Laat zien dat (in laagste-orde in termen van ϵ) de deeltjesbanen cirkels zijn.

Zie paragraaf 4.2.6

4. Een boot vaart in ondiep water. Het golfpatroon achter de boot vertoont een scherp V-vorm. Beredeneer dat de halve tophoek van deze V-vorm gegeven wordt door

$$\sin^{-1} \frac{\sqrt{gh}}{V}$$

waarbij V de snelheid van de boot is, h de diepte van het water en g de valversnelling.

Zie pag. 81; ondiep water

5. We beschouwen een viskeuze, tweedimensionale niet-samendrukbare vloeistof in het halfvlak $0 < y < \infty$ dat begrensd wordt door een plaat op $y = 0$. De vloeistof is in rust voor $t < 0$. Op $t = 0$ gaat de plaat bewegen. Voor $t > 0$ heeft de plaat een constante snelheid $(U, 0)$. De beginconditie voor de x-component van de snelheid $u(y,t)$ luidt $u(y,0) = 0$ voor alle $y > 0$. De randvoorwaarden zijn $u(0,t) = U$ voor $t > 0$ en $u\infty, t) = 0$ voor $t > 0$. We nemen aan dat er geen drukgradient is, en dat geen enkele grootheid van x afhangt.

(a) De snelheid wordt gegeven door (u, v). Toon aan dat $v = 0$.

Uit div(u,v) =0 volgt v=0

(b) Laat zien dat de Navier-Stokes vergelijking in dit geval reduceert tot

$$u_t = \nu u_{yy}$$

waarbij ν de kinematische viscositeit is.

De Navier-Stokes vergelijking wordt gegeven door (5.16). In dit geval zijn alle termen nul behalve u_t *en* u_{yy} *Verder* $\nu = \mu/\rho$.

(c) Los u op. Aanwijzing: introduceer de nieuwe variabelen $u = Uf(\eta)$, waarbij $\eta = y/\sqrt{(4\nu t)}$. NB het antwoord mag uitgedrukt worden in $\int_0^\eta \mathrm{e}^{-s^2} ds$, of iets dergelijks.

Deze opgave vergt wat meer rekenwerk. De functie f voldoet aan

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} + 2\eta \frac{df}{d\eta} = 0$$

De rvw voor f volgen uit de rand- en beginvw voor (u,v): $f(0) = 1$ en $f(\infty) = 0$. Noem $g = f'$, dan $g' = -2\eta g$, dus $g = c\exp(-\eta^2)$. f is een primitieve van g, integratieconstanten volgen uit $f(0) = 1$ en $f(\infty) = 0$.